

18 有趣的數字問題

18.1 一道六位數問題

這是一道很古老的算術問題：六位數正整數 $abcxyz$ 乘以 6 之後有如下的關係：

$$\begin{array}{r} abcxyz \\ \times \quad 6 \\ \hline xyzabc \end{array}$$

你能確定此六位數嗎？

【解】將

$$\begin{array}{r} abcxyz \\ \times \quad 6 \\ \hline xyzabc \end{array}$$

列成式子為 $6 \times abcxyz = xyzabc$ ，即 $6(1000 \times abc + xyz) = 1000 \times xyz + abc$ ，得

$5999 \times abc = 994 \times xyz$ ，除以 7 得到

$$857 \times abc = 142 \times xyz.$$

因為 857 與 142 互質，所以

$$abc = 142, xyz = 857.$$

即六位數正整數 $abcxyz$ 為 142857。

18.2 一道四位數問題

例題 18.1 有一四位數的正整數且此四位數正整數恰為其各位數字和的立方。試確定此四位數的正整數。

【解】設四位數正整數為 $abcd$ ，則 $abcd = (a + b + c + d)^3$ 。因為 $1000 \leq abcd \leq 10000$ ，所以 $\sqrt[3]{1000} \leq a + b + c + d \leq \sqrt[3]{10000}$ ，即 $10 \leq a + b + c + d \leq 21$ 。另外對 $abcd = (a + b + c + d)^3$ 模 9 得到

$$(a+b+c+d) \equiv (a+b+c+d)^3 \pmod{9},$$

即 $a+b+c+d \equiv 0, 1, 8 \pmod{9}$ 。故 $a+b+c+d = 17, 18, 19$ 或 10 。將 $a+b+c+d = 10$ 代入得到 $abcd = 1000$ 與 $a+b+c+d = 10$ 不合；將 $a+b+c+d = 19$ 代入得到 $abcd = 6859$ 與 $a+b+c+d = 19$ 不合。因此四位數正整數為 $abcd = 17^3$ 或 18^3 。即 $abcd = 4913$ 或 5832 。

習題 18.1 設四位數正整數 $abcd$ 乘以 9 之後有如下的關係：

$$\begin{array}{r} abcd \\ \times \quad 9 \\ \hline dcba \end{array}$$

你能確定此四位數嗎？

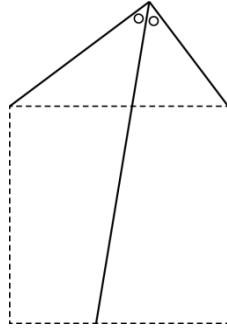
習題 18.2 求四位數，它的數字和的四次方與它相等。

習題 18.3 設 $abcd$ 表示一個數字不全相同的四位數，將此四位數的各位數字重新排列必可得一個最大數 M 及一個最小數 m （例如 7981 經重新排列後最大 $M = 9871$ ，最小 $m = 1789$ ）。試確定所有四位數字 $abcd$ 使得

$$m + abcd = M.$$

動手玩數學

如下圖：直角三角形（邊長為 12, 5, 13）的斜邊向外作正方形，角平分線將正方形分成兩區域。試求兩區域的面積比為何？



挑戰題

試找出所有滿足下列條件的正整數 n ：

“ n^2 的末三位數字都是相同且非零的數字”

(例如： $38^2 = 1444$)

距離不等的猜想

有關格子點的另一個猜想是這樣的：平面上給定任意相異的 N 個格子點，是否可以從此相異的 N 個格子點中選取 K 個點，使得此 K 個點彼此的距離皆不相同；試問 K 的最大值是多少？當 $N \leq 7$ 時， K 的最大值是知道的，例如

$$\begin{cases} N = 2, 3, 4, 5 & \text{時, } K = 2, \\ N = 6 & \text{時, } K = 3. \end{cases}$$

如果 N 大一點的話，數學家仍然不知道所對應的 K 值到底應該是多少？（關於此猜想，讀者是否可以作出 $N = 6, 7, 8$ 的情形）